从划分到螺旋:符号观点看动力系统的熵与混沌

邹丹旦[1，2,3,*]

（1. 国网江西省电力公司电力科学研究院,江西 南昌 330096）

（2. 华东交通大学,江西 南昌 330013）

（3.武汉大学，湖北 武汉 430072）

Email:ddzou@hust.edu.cn

摘要： 本文从符号与信息的角度，对混沌动力系统的特性进行了分析。提出了基于集合划分的信息熵传递特性，对连续动力系统引入有限测量精度假设，由此得出形成混沌的两个必要机制：信息由小尺度向宏观大尺度的转移及宏观信息的不断耗散，并进而对物理系统中的信息耗散进行分析讨论。

关键字：划分；动力系统；信息熵；混沌；耗散；螺旋；

1. 引言：

Clausius 最先于热力学中引入熵的概念，而后 Boltzmann 和 Planck 从微观统计角义熵的公式以描述系统的无序程度。Shannon 于 1948 年将统计熵推广于信息理论中[1], Jaynes[2] 在此基础上提出最大信息熵原理,使得信息理论与物理统计得到融合，并得以应用于经济社会等各种工程科学领域。建立于随机概率之上的熵作为认识世界的基本工具，由此已成为了各学科的普遍存在。

而随着混沌理论的发展，人们逐渐意识到，许多表面上看上去随机的序列其实可以由简单确定的函数所产生，宏观经典力学中的随机现象其实都可归于确定的力学方程。如果能脱离于概率描述，从决定论的角度来建立信息熵的体系，也许可以促进对熵及熵增加微观基础的理解和应用[3,4]。本文采用集合论体系研究动力系统的熵与信息，从最基本的划分等概念和符号对应原理出发，将信息和熵的定义建立于集合划分的精细程度之上[5]，进而对动力系统的混沌和物理系统中的耗散问题进行讨论。

此外，螺旋现象及其手性问题普遍存在于生物 DNA、复合超材料、湍流和放电等离子体等研究领域，与生命信息密切相关，且显著影响物质的性能。具有螺旋结构的分子、碳纤维器件往往具有非螺旋结构所不具备的特殊物理性能，如拉伸性、旋光性等[6-14]。但一直以来这些领域都各自分离，缺乏交叉融合，而无法揭示其内在深刻的普遍性规律。作为沟通信

息与螺旋机制的一次尝试，本文希望能抛砖引玉，为今后建立螺旋相关领域的共同理论研究基础提供参考。

2. 符号与测量

测量可以归结为一种分辨的能力，是对由可测量对象所组成的集合的一种**划分**。在集合论中，集合 A 的非空子集 $A_i(i=1,2,...,m)$ 的集合 $\{A_1,A_2,...,A_m\}$ 是 A 的一个划分，如果：

（1） $A=\mathrm{U}A_i$；

（2）若 $A_i \neq A_j$，则 $A_i \cap A_j = \varnothing$.

某些实际情况中的划分可能具有一定随机性，可以用模糊逻辑的方法对其进行修正。而在集合 A 内，对象之间关系的测量则相当于在对 A 与自身直积 $A\times A$ 上的划分。

符号通常只被注意到其传播的过程与方式，而很少被注意到其与测量的关系。对于一个房间中的温度计，我们不需要用自己的触觉去感知这个房间中的温度如何，我们只需要用眼睛去读这个温度计的示数，或者被他人告知这个读数。而我们所读到的只不过是温度计或他人所传递给我们的一个符号。感觉的确在这个过程中起到了重要作用。因为如果我们没有能对温度感知的触觉，那么温度计上的示数对我们也是毫无意义的。

符号学主要研究能指与所指之间的对应，但在实际测量中使用的符号主要关注于函数类型的对应关系，而且本文中所说的函数不要求值域为数域。函数的定义可以用集合的语言表达为：

A 和 R 为任意的二个非空集合，K 为正整数，$A^K = A\times A\times\cdots\times A$，为 A 与自身的 K-1 次直积。根据某种操作或规则(算子)F，对于 A^K 中的每一个元素，R 中都存在唯一的元素与之对应，则称 F 为 A 到 R 的 K 元函数，记为 $F: A^K \to R$。

由以下定理，函数给定了一种对其自身定义域的划分：

定理： **对于函数 $F: A\to R$， F 可以诱导集合 A 上的一个划分。**

对于集合 A^K 上的函数 $F: A^k \to R$ 也有同样的定理。因而函数对应关系，作为一种特殊的符号，表达了对定义域内的对象的某种**测量**。

另外需要注意的是，这种对应关系对于测量并不是必须的，例如我们可以认别不同的颜色，并不需要用语言符号来识别它们。可以将其分为两个过程：对象的划分，子集（等价类）与符号（或值域）的对应。人工智能模式识别其实也是通过某种复杂函数对应的方式进行划分，而不论函数如何定义，最后必有一种划分是不能被定义的。

在函数对应关系 $F: A^k \to R$ 中，称 R 为 A 的量，R 中的元素称为 A 在 R 中的值。当 *K=1*

时，称 R 为 A 的属性，R 中的元素为 A 在 R 中的特征值（或性质）；当 $K>1$ 时，称 R 为 A 的关系量，R 中的元素为 A 在 R 中的关系。

3. 符号与信息熵

测量的精确度取决于划分的精细程度。划分越精细，值所对应的元素也就越确定，所表达的信息量也就越大。其中**二元划分**将一个集合划分为两个非空子集，是最基本的划分方式。如同数的二进制表达一样，集合所有的划分方式都可以归为二元划分的运算组合。

当要明确指定有 N 个元素的集合 A 中的某个任意元素时，需要施加的二元划分次数为 $S_R = [\log_2 N]$，其中[x]为不小于 x 的最小整数，此函数具有熵的属性，作为对认知复杂性的描述，与热力学熵的表达式定义相似。当然也可以三元划分、八元划分或更高元为基底，由于对数运算的性质，这些划分的熵之间呈正比关系，只差一个固定的比例系数，因而定义集合 A 上的熵为：

$$S_R = \log_2 N . \tag{1}$$

对于集合 A 的一个划分 L: $\{A_1, A_2, ..., A_m\}$，每个子集 A_i 的元素个数为 N_i，当需要衡量划分的精细程度时，可以定义平均熵：

$$\overline{S}_{RL} = \sum_{i=1}^{m} \frac{N_i}{N} \log_2 N_i . \tag{2}$$

在集合划分基础上，定义信息熵为：

$$I_L = -\sum_{i=1}^{m} \frac{N_i}{N} \log_2 \frac{N_i}{N} , \tag{3}$$

平均熵与信息熵的关系为:

$$I_L = Log_2 N - \overline{S}_{RL} = S_R - \overline{S}_{RL} . \tag{4}$$

可以看出平均熵与信息熵成反比关系，集合 A 划分越精细，代表指代关系越清楚，划分符号所具有的信息量越大，同时信息熵 I_L 越大，平均熵越小 $\overline{S}_{RL}$。

由于函数具有可复合性，在集合 R 上可以再另外定义函数，而信息传递的过程，也就等价于符号变换的过程。**在不可逆映射的符号传递过程中，信息熵（平均信息量）只能不断减小。而对于可逆的一一映射，熵具有变换不变性。**

因而对于任意非空函数 $F: A \to R$ 和 $G: R \to L$，有：

$$I_L \le I_R . \tag{5}$$

可以看出，以上定理对于理想测量及离散的情况是普遍适用的，信息只会在传递过程中发生丢失，信息熵不断减小，同时平均熵增加，这在语言符号的传递表达中是普遍的规律。

4. 动力系统

系统由元素和元素之间的关系量组成，而随时间演化的**动力系统**则可以看成是系统所有与时间演化相关的量组成的相空间，及其上定义的时间演化函数（流映射）。对于动力系统（A，f）,其中 A 为系统的相空间，f 为相空间 A 上的时间演化函数，如果将时间演化函数等价于上节中信息的传递函数，易于理解初始状态的信息会随着时间的演化（时间演化算子 f 的不断迭代）而丢失，即对于不可逆流映射构成的耗散系统，我们不可能根据当前时刻的状态推导出系统以前所处的状态。

以最简单的**二元动力系统**（{a, b}, f）为例，二元动力系统相空间仅有两种状态 a，b，则二元系统可能定义的演化函数种类有

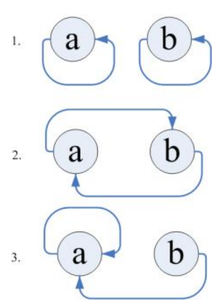


图 1. 二元动力系统的三种不同演化函数

对于图中情况 1 的系统，状态将不随时间变化，而情况 2 中状态将呈现循环交换演化。情况 3 则完全不同于 1、2，其演化函数为不可逆映射，且不管初始状态如何，系统最终将聚集于状态 a 中，a 与 b 元素处在了不平等的地位。因为聚集于状态 b 的情况与聚集于 a 本质上不存在类型的差别，所以这里没有单独作为情况 4 列出。

由于情况 3 是不可逆映射，当某时刻处于状态 a 时，已无法判断上一时刻是 a 还是 b 演化而来的，因而信息在这种演化下发生了损失，系统是耗散的。而情况 1 和 2 都是一一映射，这一时刻和上一时刻的状态一一对应，系统的熵将在这种演化下将保持守恒。

二元划分是一切划分的基础，在连续动力系统看来，情况 1 对应于平衡，情况 2 对应于周期波动，情况 3 对应于耗散。三元（及多元）动力系统与此类似，演化包含以上三种类型：静止、周期交换、聚集。由于函数的唯一对应性质，离散元素的演化函数不存在信息熵的增加过程。

对于二元随机动力系统，由于许多不可测因素的影响，无法根据上一个时刻的状态完全决定下一个时刻状态，需要通过定义转移概率来描述系统的随机演化，可以定义 P(a|b)为由初始状态 a 演化到状态 b 的概率，同理分别定义 P(b|a)， P(a|a)以及 P(b|b)，这时系统的熵由包含传统概率的信息熵来描述。最大信息熵原理认为在满足某些约束的条件下，系统演化的转移概率的分布往往使得信息熵最大。然而对于确定的二元及多元动力系统熵只会减少，不存在这样的最大信息熵原理。

5. 连续动力系统的信息熵增原理

以上主要研究的是离散的符号系统，然而对于确定的**连续动力系统**，当定义的函数 F 是连续的压缩映射时，即使 F 是不可逆的，在已知的许多动力系统中信息仍然会不断增加，甚至在许多随时间演化的热力学过程中是熵产生而非减小。例如对于 Logistic 映射及二次映射都是不可逆的映射，信息熵在映射不断的迭代过程中整体是减少的，然而 Logistic 映射并非都趋于稳定点或周期循环，而是存在非周期的无规则混沌过程。

为了解释连续系统的这一矛盾，需要引入有限精度测量的假设，即对于连续变量，实际测量中的精度总是有限的，始终有测量误差的存在。因而对于压缩映射，当两点之间的距离压缩到足够小时，相当于两个原本不同的点合并为同一个点，以这种机制信息同样会发生丢失。相反，当映射是扩张的时候，信息量会发生增大。信息增大的部分来源于微观不可测的区域，相当于信息从小尺度向大尺度的转移。

考虑一维连续动力系统，相空间为实数区间[0,L]，演化函数为 f(x)，设其相空间的可测量精度为 ε，则其将相空间中某点 x 附近长度为Δx 的局部区间划分为了Δx/ε 个相格，根据式（1）定义初始连续系统的局部熵为：

$$S=\log_2\frac{\Delta x}{\varepsilon}, \tag{6}$$

经过演化函数 f(x)作用后，局部的间距发生了变化，任意一点相应的信息熵为（考虑到反转的情况取绝对值）

$$S'=\log_2\frac{|f(x+\Delta x)-f(x)|}{\varepsilon}. \tag{7}$$

局部的熵增为：

$$\Delta S=\log_2\frac{|f(x+\Delta x)-f(x)|}{\varepsilon}-\log_2\frac{\Delta x}{\varepsilon}=\log_2\left|\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right| \tag{8}$$

当 ε 和Δx 足够小时：

$$\Delta S=\log_2\left|\frac{df(x)}{dx}\right| \tag{9}$$

经过 m 次演化迭代后，平均熵增为：

$$\Delta S=\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}\log_2\left|\frac{df(x_n)}{dx}\right| \tag{10}$$

当 m 趋于无穷时，相轨的平均熵增即为李雅普诺夫指数。李雅普诺夫指数是描述系统进入混沌的最重要指标，代表相空间中初始状态相近的两点随时间演化后的平均指数发散率，在相空间内初始相邻两点的距离将以李雅普诺夫指数的指数次方随时间演化。对于压缩映射，相空间体积一直处于收缩的状态，李雅普诺夫指数为负数，信息从大尺度向小尺度区域转移，

而对于混沌状态，系统必存在李雅普诺夫指数为正的区域，信息在这些区域由小尺度向大尺度转移，从而使得系统宏观发生熵增。

折叠过程也是混沌的一个重要特性，可以归结为信息在相空间整体的耗散机制。例如对于 Logist 映射，$ax(1-x)$的二次代数运算等效于将 x 实数轴拉伸再折叠，而后代入下一次迭代，类似于面包师变换，信息在这个过程中发生了损失耗散，而后不断得到小尺度信息的弥补。对于周期三的连续系统混沌也同样有此特性。实际的物理混合过程虽不存在完全理想的折叠，但可以像面包师那样通过压缩使距离无限接近，使信息从大尺度压缩到不可测的小尺度，从而形成耗散。

由以上讨论可知，连续映射中的熵产生机制是混沌现象出现的必要条件。混沌总是伴随着微观信息向宏观的转移，以及宏观信息的不断耗散。对于存在这种熵产生机制的系统，系统的约束（包括守恒量、近似守恒量及边界）在一定程度限制了信息在宏观的进一步放大，相应地就确保了宏观耗散机制的存在。当这两种机制同时形成于连续系统中，比如奇怪吸引子，相点可以在区域内不断远离，之后又不断接近，从而出现了混沌的一系列特性。

6. 关于物理系统中熵转移机制

以上机制同样可以解释在统计物理学中，特别是在对大量近独立微观粒子系统的描述中，系统的平衡处于熵最大的分布。可以证明对于微观粒子的物理碰撞散射是熵转移过程：当粒子（如 α 粒子与重原子）相互靠近时，α 粒子的散射角与其瞄准距离（α 粒子入射方向与重原子核之间的垂直距离）密切相关。实验过程不可能准确测量 α 粒子对某个重原子的瞄准距离，散射角则可以通过实验测量，并从大量 α 粒子与重原子的散射事件中得到粒子数与散射角的统计关系。因而每次碰撞过程中，微观不可测的信息（瞄准距离）放大进入到了宏观可测的范围，信息从小尺度转移到了大尺度，宏观系统可测的信息量增大了，导致了系统的熵增。当两体或三体碰撞过程的次数不断增加，宏观系统必达到如统计物理所述在守恒量约束下的最大熵状态。对于流体中的三波相互作用过程，如果将波看成粒子，也同样可以应用类似的统计方法。

而从相反的角度来看，假设存在如拉普拉斯所述的观测者，能够精确地测量每一个粒子的位置、速度、乃至生灭过程，观测能力可以跨越不同的空间和时间尺度，那么信息在物理系统的演化中总量将不会增减。这样的观测者不仅能准确计算物理相空间的每一条相轨，而且将不觉得时间是有方向的，包含时间不可逆性的统计和耗散理论在这种层面上将成为局域近似模型。而且统计系综方法将相点分配于各个可测的相格中，无形中截断了小尺度的信息。

由于物理粒子的所有动力学方程都可逆，时间演化函数为一一映射，信息在系统整体不

发生损失而只有转移交换，因而关于二元动力系统的图 1 中情况 3 的压缩映射并不适用于物理系统的粒子层面。从而可以看出，物理系统的耗散过程及时间的方向性也必依赖于上节中连续系统的熵转移机制，是信息在不同空间尺度的转移所致。

另外值得注意的是，无限维动力系统不仅体积的压缩和膨胀会引起信息在不同空间尺度的传递，还存在其它作用机制引起不同尺度的信息转移。一个典型的例子是三维不可压缩流体中螺旋波模的波波相互作用，对理想不可压缩流体方程[6]：

$$\nabla\cdot\vec{u}=0, \tag{11}$$

$$\partial_t\vec{u}+(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}=-\frac{\nabla p}{\rho}. \tag{12}$$

在圆柱有限边界下，对空间做傅利叶级数展开得：

$$\partial_t\vec{u}(\vec{k})=-i\sum_{\vec{k}'}[\vec{u}(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{k}]\vec{u}(-\vec{k}')+i\frac{\vec{k}}{k^2}\sum_{\vec{k}'}[\vec{u}(\vec{k}+\vec{k}')\cdot\vec{k}][\vec{u}(-\vec{k}')\cdot\vec{k}]. \tag{13}$$

由中性流体不可压缩性质及边界保证了方程中只存在螺旋波解，可以证明流体在波数空间的相空间体积仍然守恒，而方程中不同尺度的波数 $\vec{k}'$ 与 $\vec{k}+\vec{k}'$ 对波数 $\vec{k}$ 产生了三波作用，形成了信息的多尺度传递。如果对波数用统计力学的方法进行研究，会发现能量出现级联（向小尺度或大尺度集聚），截断不可测的小尺度波数后，具有耗散系统的特性。日常生活中的搅拌混合也可以抽象为流体旋转模式的一种，这种机制在一定程度等同于压缩引起的耗散，属于加速混合的反常耗散机制。而在等离子体中由于电磁场作用等机制的引入，同样存在更为丰富的螺旋现象和多尺度耗散机制[11-14]。

自相似与自组织现象也来源于不同尺度的信息熵关联，人类意识与心理变化也应符合以上信息熵的规律，这些问题还有待后续进一步深入研究。

7. 总结

本文从集合划分和符号对应的角度出发对信息熵进行定义，并以此形成信息的传递原理，应用于动力系统的相空间演化过程中。从信息熵的时间演化传递中可以看出，离散动力系统不存混沌现象，离散系统相空间的演化只存在稳定、周期及集聚行为，信息只会在传递过程和时间演化下逐渐耗散减少，而不会有信息熵的自发产生。然而对于测量精度有限的连续动力系统而言，存在信息熵由不可测的小尺度向可测的大尺度转移的过程，从而造成了宏观尺度的熵增。连续系统混沌产生的机制来源于信息从小尺度向大尺度转移，以及大尺度信息向小尺度耗散的过程。对于经典力学中的系统而言，基本动力方程是可逆的，演化函数是一一对应的，信息熵应该在系统整体守恒，然而由于信息熵在不同尺度的压缩和螺旋等多种转移

机制，才使得在空间尺度有限的许多局域模型中存在不可逆性。本文在此仅作为一个整体性框架的概述，信息与混沌及流体统计的理论后续还有待更深入的研究。

致谢

感谢谢华生与朱建州教授关于熵与三波相互作用的有益探讨！

参考文献

[1] C. E. Shannon. Amathematical theory of communication. Bell Sys Tech J, 1948, 27: 623～659
[2] E. T. Jaynes. Information theory and statistical mechanics. Phys Rev, 1957, 106(4): 620～630
[3] 邢修三.再论统计物理基本方程 [J].中国科学(A 辑),1998(01):62-71.
[4] 邢修三.物理熵、信息熵及其演化方程[J].中国科学(A 辑),2001(01):77-84.
[5] 邹丹旦. 一般静态系统的数学描述[J]. 系统科学学报, 2015, 23(04):11-13.
[6] T. D. Lee On some statistical properties of hydrodynamical and magneto-hydrodynamical fields. Quart Appl Math, 1952, 10: 69–74.
[7] R. H. Kraichnan. Helical turbulence and absolute equilibrium. J. Fluid Mech, 1973, 59: 745–752.
[8] 邹丹旦. 双流体等离子体模型的平衡与稳定性分析[D].中国科学技术大学,2013.
[9] Z. W. Xia, C. H. Li, D. D. Zou, et al. Helical Mode Absolute Statistical Equilibrium of Ideal Three-Dimensional Hall Magnetohydrodynamics[J].Chinese Physics Letters,2017,34(01):74-77.
[10] 陈鹏,杨焱,朱建州.等离子体非线性手性:有螺统计及可积结构[J].中国科学:物理学 力学天文学,2020,50(04):47-53.
[11] T. Darny, E. Robert, D. Riès, S. Dozias, and J. M. Pouvesle, IEEE Trans. Plasma Sci. **42**, 2504 (2014).
[12] T. Darny, E. Robert, S. Dozias, and J. M. Pouvesle, IEEE Trans. Plasma Sci. **42**, 2506 (2014).
[13] D. D. Zou, X. Cao, X. P. Lu and K. Ostrikov, 2015 Phys. Plasmas 22, 103517.
[14] 邹丹旦,蔡智超,吴鹏 等.脉冲放电产生螺旋流注的等离子体特性研究[J].物理学报,2017,66(15):206-211.